Lipschitz

4^{o} Μάθημα:

29/10/2020

Παράδειγμα:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$,

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $h(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)$, $m=1,2,\dots$

Να βρεθούν όλα τα δυνατά εσωτ. γινόμενα στο $[-\pi,\pi]$

Λύση:

$$\langle f|g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\left(=\int_{-\pi}^{\pi}f^{*}g\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx=0$$

$$\langle f|h\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(mx)dx= \longrightarrow$$

Πρόχειρο:

$\int\sin(q_1x)\cos(q_2x)dx$ $\quad q_1,q_2\in\mathbb{R}$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες: $\cos^2x+\sin^2x=1$

$\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$

$2\sin x\cos x=\sin2x$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ Ταυτότητα Euler

$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ $\quad e^{i\pi}=-1$

$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2\sin(mx)\cos(mx)}_{\sin(2mx)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\,dx = 0$$

$$\langle g|h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle f|f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin^2(mx)\,dx = ? \\ \langle g|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\,dx = ? \\ \langle h|h\rangle == \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\cdot\cos^2(mx)\,dx = ? \end{array}\right\}\text{σπιει}$$

Διανυσματικοί χώροι απείρων διαστάσεων:

Ορισμός: Ένας χώρος Hilbert είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό τέτοιο ώστε η νόρμα
$\langle f|f\rangle = \|f\|^2$ να μετατρέπει τον χώρο σε πλήρη μετρικό.

Ορισμός: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots\}$ σε ένα χώρο Hilbert αποτελεί βάση του χώρα αν

$$\langle x|e_i\rangle = 0 \Rightarrow |x\rangle = 0$$

Αυτό το σύστημα διανυσμάτων είναι πλήρης.

Θεώρημα:
Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσματων $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots\}$ σε ένα χώρο αν-ν ισχύει η ταυτότητα Parseval.

Έστω 2 Π.Α.Τ. $f(t, z(t))$

Απόδειξη:

Θεωρούμε ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle\}$ στον H. Τότε $\forall\ |b\rangle \in H$ $\langle b|e_i\rangle = 0$ $\Rightarrow |b\rangle = 0$.

Κατασκευάζω το $|b\rangle = |a\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} a_i |e_i\rangle$ με $a_i = \langle e_i|a\rangle$ τότε

επειδή το b είναι σε bra

$$\langle b|e_j\rangle = \langle a|e_j\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \langle e_i|e_j\rangle$$

$$= \langle e_j|a\rangle^* - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \langle e_i|e_j\rangle$$

$$= \langle e_j|a\rangle^* - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \langle e_j|e_i\rangle\right)^*$$

$$= a_j^* - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \delta_{ij} = a_j^* - a_j^* = 0$$

Συνεπώς $|b\rangle = 0 \Rightarrow |a\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |e_i\rangle$

$a_i = \langle e_i|a\rangle$

Αντίστροφο: Θεωρούμε ότι $\langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i|a\rangle|^2$

$\forall |a\rangle \in H$. Έστω ότι $\exists\ |b\rangle \in H$ με $\langle e_i|b\rangle = 0$

Τότε $\langle b|b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i|b\rangle|^2 = 0 \Rightarrow |b\rangle = 0$

Άρα το $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots\}$ αποτελεί βάση του H

Θεωρία Τελεστών:

Ορισμός: Ένας τελεστής είναι μια απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου σε ένα άλλον. Ορίζεται από τη δράση του. Δηλ. ο κανόνας με τον οποίο ένα διάνυσμα $|f\rangle$ μεταβαίνουμε στο $|g\rangle$ μέσω της δράσης ενός τελεστή.

π.χ. A

$|f\rangle \to |g\rangle = A|f\rangle$, A τελεστής

Παράδειγμα: Έστω $|x\rangle \in \mathbb{R}^3$, $\bar{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
τότε $|y\rangle = \bar{y} = a\bar{x}$, a σταθερό
↳ είναι ο τελεστής

Παράδειγμα: $f(x) = x^2$, $A = \frac{d}{dx}$

$g(x) = Af = \frac{d}{dx} x^2 = 2x$

Σχόλιο: Πρέπει να αναφέρουμε τους χώρους των κατάλληλων συναρτήσεων

Ειδικές περιπτώσεις:

1. Αν $A|f\rangle = 0$ $\forall$ $|f\rangle \in S$ ώστε ο τελεστής είναι ο μηδενικός κ' γράφουμε $A \equiv 0$
2. Αν $A|f\rangle = |f\rangle$ ο A είναι ταυτοτικός τελεστής $\forall$ $|f\rangle \in S$

Παρατήρηση: Αν $A|f\rangle = |f\rangle$ μόνο για τέτοια $|f\rangle \in S$ (όχι για όλα) δεν είναι ταυτοτικός
Συμβολίζουμε $A = I$

Παράδειγμα: Στο χώρο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $|f\rangle = f(x)$ αν $f(x) = e^x$
και $A = \frac{d}{dx}$ τότε $Af(x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x = f$
ή $A|f\rangle = |f\rangle$. Προφανώς ο A δεν είναι ταυτοτικός

Ιδιότητες:

1. Δύο τελεστές A και B είναι ίσοι αν $A|f\rangle = B|f\rangle \ \forall |f\rangle \in S$
2. Για ένα τελεστή A και μια σταθερά $a \in \mathbb{C}$ ορίζουμε τον $B = Aa$ ώστε $B|f\rangle = Aa|f\rangle = A(a|f\rangle) = A|f'\rangle$
$|f'\rangle = a|f\rangle$

Όμοια $C = aA$ τότε $C|f\rangle = aA|f\rangle = a|g\rangle$
και $|g\rangle = A|f\rangle$
Δηλ. η σειρά των πράξεων έχει ιδιαίτερη σημασία.

3. Το άθροισμα δύο τελεστών είναι τελεστής και ορίζεται ως $C = A + B$ με δράση
$$C|f\rangle = (A+B)|f\rangle = A|f\rangle + B|f\rangle$$
$$= B|f\rangle + A|f\rangle$$
$$= (B+A)|f\rangle = C|f\rangle$$
Άρα $A+B = B+A$ αφού ισχύει $\forall |f\rangle \in S$

4. Για δύο τελεστές A και B ορίζουμε τον $C = AB$ ώστε $C|f\rangle = AB|f\rangle =$
$= A(B|f\rangle) = A|g\rangle$
$|g\rangle = B|f\rangle$ και γενικά $AB \neq BA$

Η σειρά έχει σημασία!

SOS

Παράδειγμα:
για εις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $|f\rangle = f(x)$ ορίζω τα $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$ τότε

$AB|f\rangle = ABf(x) = A(x\,f(x)) = \frac{d}{dx}(x \cdot f(x)) =$

$= f(x) + x\frac{df}{dx} = |f\rangle + BA|f\rangle$

Δηλ. $AB|f\rangle = |f\rangle + BA|f\rangle$
Προφανώς $AB \neq BA$

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να έχουμε $AB = 0$ και $A, B \neq 0$

5. Ένας τελεστής καλείται 1-1 αν $A|f\rangle = A|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$ δηλ. η εικόνα $A|f\rangle$ προσδιορίζει πλήρως το αρχικό $|f\rangle$

Παράδειγμα (στο 5)
Έστω $f(x)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $D = \frac{d}{dx}$

$D|f\rangle = \frac{df}{dx}$ όμως $D(\underbrace{|f\rangle + a}_{g}) = D|f\rangle + Da =$

$= \frac{df}{dx} + 0 = \frac{df}{dx} = D|f\rangle$

Συνεπώς η παραγώγιση δεν είναι "1-1" τελεστής

6. Αν ένας τελεστής είναι 1-1 $\exists$ και ο αντίστροφος του, συμβολίζουμε A^{-1} ώστε
$|g\rangle = A|f\rangle \Leftrightarrow |f\rangle = A^{-1}|g\rangle$

και $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Απόδειξη: έτσι ξεκινάω όταν $AA^{-1}=A^{-1}A$

Ξέραμε $|g\rangle = A|f\rangle$

$|f\rangle = A^{-1}|g\rangle$

$|g\rangle = A|f\rangle = AA^{-1}|g\rangle = I|g\rangle$

$|f\rangle = A^{-1}|g\rangle = A^{-1}A|f\rangle = I|f\rangle$

άρα $I = AA^{-1} = A^{-1}A$

Παράδειγμα: Έστω $\int_0^x dx'$, $0\le x\le 1$

δηλ. η δράση του A στο χώρο των ολοκληρώσιμων συναρ. είναι $A|f\rangle = \int_0^x f(x')dx'$ και

Θεωρώ $B = \frac{d}{dx}$ (δηλ. επιτρέπω και παραγώγισιμες συναρτήσεις).

$B A|f\rangle = B\int_0^x f(x')dx' = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x')\,dx' =$

$= f(x) = I f(x) = |f\rangle$

$x' = t$ μπορούμε να πούμε

$AB|f\rangle = A\frac{d}{dx}f(x) = \int_0^x \frac{df}{dx'}dx' = f(x) - f(0) \neq |f\rangle$

εκτός αν $f(0)=0$

Άρα $AB \neq BA$ και $A^{-1}\neq B$ εκτός για εις f με $f(0)=0$